Statystyka i analiza danych - laboratorium 5 - Wprowadzenie do testów

Paweł Misiorek

Instytut Informatyki
Politechnika Poznańska (PP)
Piotrowo 3, 60-965 Poznan, Poland
Email: pawel.misiorek@put.poznan.pl

28/31 marca 2023

Zakres laboratorium

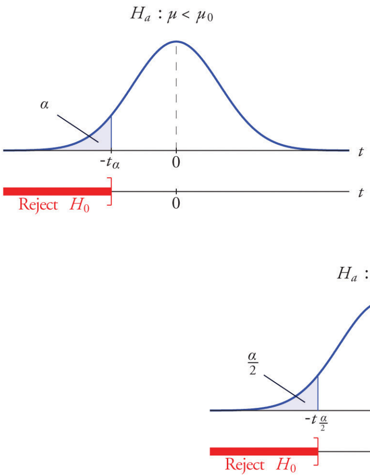
Cele laboratorium:

- Hipoteza statystyczna - hipoteza zerowa H_0 oraz hipoteza alternatywna H_1.
- Statystyka testowa: zmienna losowa, której dotyczą hipotezy.
- Rozróżnienie między testem jednostronnym a dwustronnym.
- Obszary krytyczne.
- Pojęcie *p*-value.
- Poziom istotności - α - prawdopodobieństwo odrzucenia H_0.
- Moc testu $(1 - \beta)$.
- Błędy pierwszego i drugiego rodzaju.

Formułowanie hipotez

- Statystyka testowa: $Z = Z(X_1, \ldots, X_n)$
- Hipoteza zerowa H_0: $\mu = \mu_0$
- Hipoteza alternatywna:
  dla testu dwustronnego $H_a : \mu \neq \mu_0$
  dla testu lewostronnego $H_a : \mu < \mu_0$
  dla testu prawostronnego $H_a : \mu > \mu_0$
- wartość krytyczna z_{kr} oraz zbiór krytyczny C_{kr}
  dla testu dwustronnego $C_{kr} = (-\infty, -z_{kr}) \cup (z_{kr}, \infty)$
  dla testu lewostronnego $C_{kr} = (-\infty, -z_{kr})$
  dla testu prawostronnego $C_{kr} = (z_{kr}, \infty)$

Obszary krytyczne

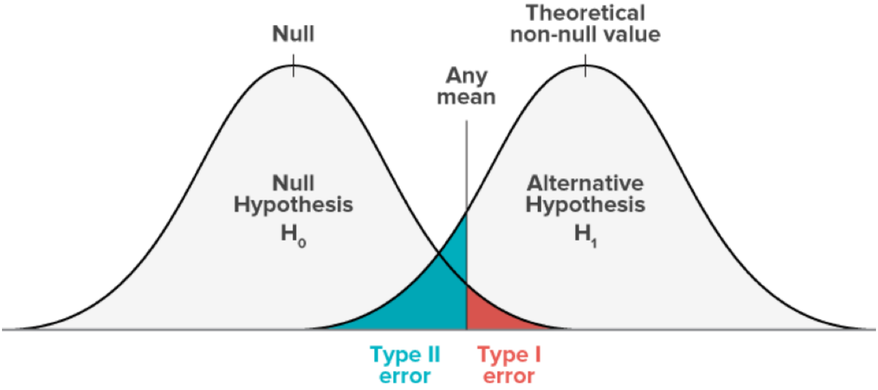


Rysunek: [źródło] https://saylordotorg.github.io/text_introductory-statistics/s12-04-small-sample-tests-for-a-popul.html

Błędy I i II rodzaju

- Błąd pierwszego rodzaju:
  - *odrzucenie H_0, która jest prawdziwa*
  - czyli $Z \in C_{kr}$ i jednocześnie H_0 jest prawdziwa
  - prawdopodobieństwo popełnienia błędu I rodzaju nazywamy poziomem istotności i oznaczamy α
- Błąd drugiego rodzaju:
  - *zachowanie H_0, która nie jest prawdziwa*
  - czyli $Z \notin C_{kr}$ i jednocześnie H_0 jest fałszywa
  - prawdopodobieństwo popełnienia błędu II rodzaju oznaczamy β
- Zależności:
  - zmniejszając α zwiększamy β

Błędy pierwszego i drugiego rodzaju

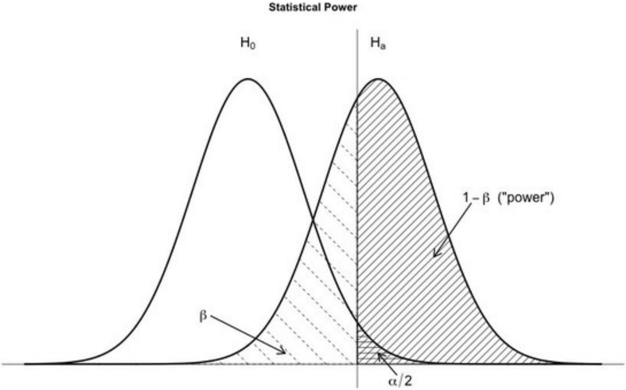


Rysunek: [źródło] https://www.abtasty.com/blog/type-1-and-type-2-errors/

p-value i moc testu

- *p*-value:
  - *p-value dla danego testu (dla zebranych danych) to najmniejszy możliwy poziom istotności α, dla którego możemy jeszcze odrzucić hipotezę zerową*
- Moc testu:
  - $1 - \beta$ - prawdopodobieństwo odrzucenia H_0, która nie jest prawdziwa
  - moc testu rośnie wraz z: poziomem istotności (im większe α tym większe $1 - \beta$), a także z odległością między μ a μ_0 oraz z liczbą próbek w próbie (czyli jeśli chcemy mieć *mocniejszy* test zwiększamy liczbę próbek),
  - z kolei im większe odchylenie standardowe w populacji tym mniejsza moc testu.

Poziom istotności i moc testu



Rysunek: [źródło] https://www.quora.com/What-is-the-relationship-between-statistical-power-and-the-p-value

Test Z

- Założenie: zmienne $X_1, \ldots, X_n$ są niezależne, mają ten sam rozkład, skończoną wartość oczekiwaną oraz skończoną i różną od zera wariancję.
- Statystyka testowa $Z_n = Z(X_1, \ldots, X_n)$ na bazie Centralnego Twierdzenia Granicznego dąży do ustandaryzowanego rozkładu normalnego i ma postać

$$Z_n = \frac{\bar{X}_n - \mathbb{E}[\bar{X}_n]}{\mathbb{D}[\bar{X}_n]} = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \approx N(0,1)$$

- wykonując test korzystamy z tablic rozkładu normalnego

Test Z dla testu dla rozkładu dwupunktowego

- Założenie: zmienne $X_1, \ldots, X_n$ są niezależne, mają rozkład dwupunktowy taki, że $Pr(X=1) = p$ i $Pr(X=0) = 1-p$.
- Mamy $\mathbb{E}[X] = p$, wariancja $\mathbb{D}^2[X] = p(1-p)$
- Sprawdzamy czy próbka jest odpowiednio liczna - warunki: $np > 5$ i $n(1-p) > 5$.
- Dla średniej mamy: $\bar{X}_n = \frac{\#jedynek}{n}$, $\mathbb{E}[\bar{X}_n] = \mu = p$, $\mathbb{D}^2[\bar{X}_n] = \frac{p(1-p)}{n}$
- Statystyka Z ma postać:

$$Z_n = \frac{\bar{X}_n - p}{\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}} = \frac{\bar{X}_n - p}{\sqrt{p(1-p)}}\sqrt{n} \approx N(0,1)$$

- Równoważnie:

$$Z_n = \frac{\#jedynek - np}{n\sqrt{p(1-p)}}\sqrt{n} = \frac{\#jedynek - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

- wykonując test korzystamy z tablic rozkładu normalnego

Pytania

Pytania proszę zadawać:

- w czasie zajęć/konsultacji,
- na Slacku, mailowo.